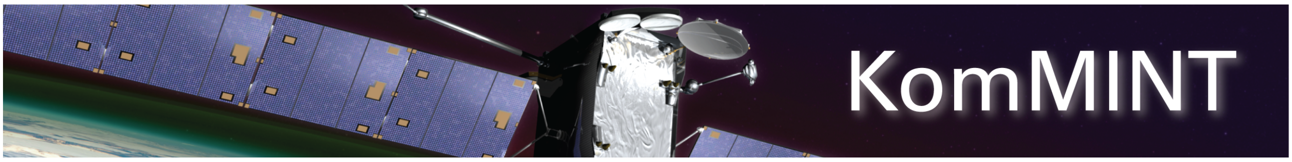
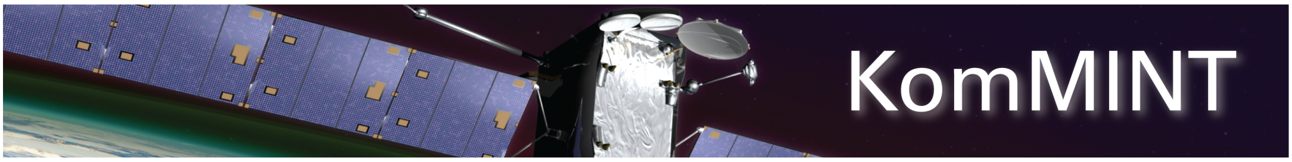


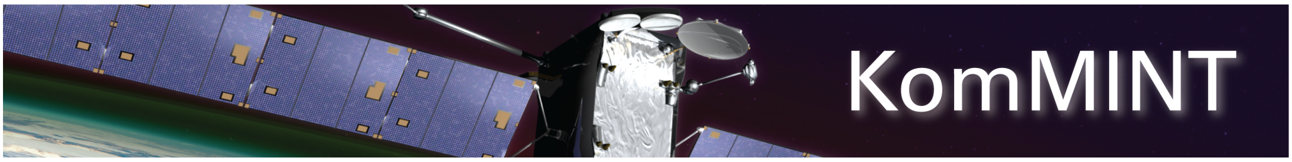

# KomMINT Theorie Satellitennavigation

Selina Malacarne – selina.malacarne@ost.ch
Michel Nyffenegger – michel.nyffenegger@ost.ch

Rapperswil, 30/08/2023




# Inhaltsverzeichnis




# 1 Navigationssysteme

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, um auf der Erde zu navigieren. Einige dieser Möglichkeiten sind bereits sehr alt und wurden schon tausend Jahre vor Christus verwendet, um bspw. auf dem offenen Meer zu navigieren. Man unterscheidet grundsätzlich folgende Arten der Navigation:

- Die Position wird mit Hilfe bekannter Objekte in der unmittelbaren Umgebung bestimmt.
- Die Position wird mit Hilfe einer Karte, einem Kompass und einer Uhr bestimmt.
- Die Position wird mit Hilfe der Sterne bestimmt.
- Die Position wird mit Hilfe von Sensoren (Beschleunigungs- und Gyrosensoren) bestimmt.
- Die Position wird mit Hilfe von bodengestütztem Radar bestimmt.
- Die Position wird mit Hilfe von erdnahen Satelliten bestimmt.

Im Folgenden wird die Satellitennavigation in den Fokus gerückt.

## 1.1 Ortung im zweidimensionalen Raum

Mit Hilfe bekannter Fixpunkte ist es möglich seinen eigenen Standort in einem Raum zu bestimmen. Hat man einen bekannten Fixpunkt $S_1$ gegeben sowie eine Angabe dazu wie weit der eigene Standort von diesem Fixpunkt entfernt ist, so kann man schlussfolgern, dass sich der eigene Standort auf einem Kreis um den gegebenen Fixpunkt befinden muss, wie in Abb. 1 dargestellt.

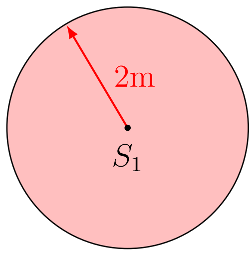



Abbildung 1: Der Standort liegt auf einem Kreis um den gegebenen Fixpunkt $S_1$.

Möchte man seinen eigenen Standort noch genauer bestimmen, so benötigt man einen zweiten Fixpunkt $S_2$, von welchem ebenfalls die Distanz zum eigenen Standort bekannt ist. Durch diesen zweiten Fixpunkt entsteht ein zweiter möglicher Kreis an Positionen, welcher sich mit dem ersten Kreis schneidet[1], wodurch sich die Lösungsmenge von einem Kreis auf zwei mögliche Punkte reduziert wie in Abb. 2 dargestellt.

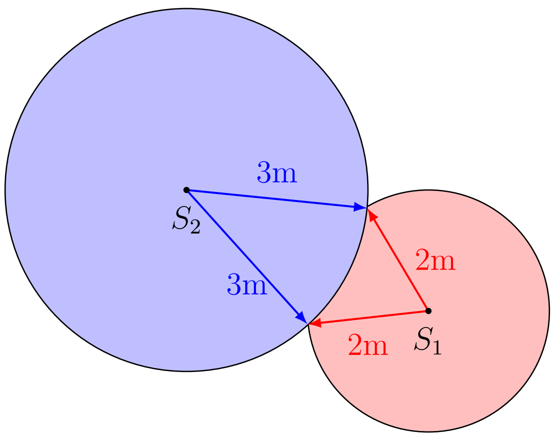



Abbildung 2: Der Standort liegt auf einem der beiden Schnittpunkte.

Für die exakte Bestimmung des Standorts $S_\text{u}$ (u = User) wird nun noch ein dritter Fixpunkt benötigt, welcher die Ambiguität der beiden möglichen Lösungen auflöst wie in Abb. 3 darge-

[1]Würden sich die beiden Kreise nicht schneiden, dann ergäbe das Lösungssystem keine Lösung

stellt. Hat man die Fixpunkte sowie die Distanzen eben jener Fixpunkte zum gesuchten Stand-

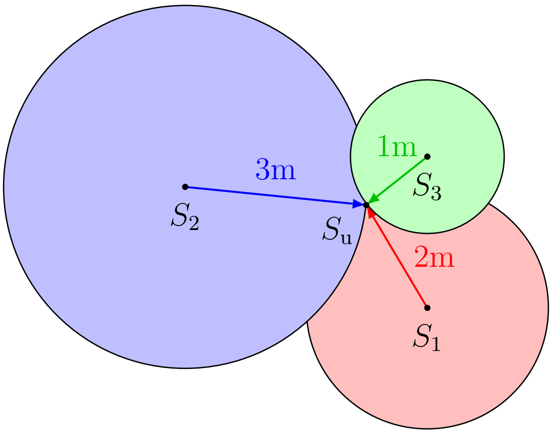



Abbildung 3: Der mittels drei gegebener Fixpunkte exakt bestimmte Standort.

ort $S_u$ gegeben, so lässt sich mit Hilfe des Satz von Pythagoras folgendes Gleichungssystem aufstellen:

$$d_1 = \sqrt{(x_1 - x_u)^2 + (y_1 - y_u)^2}$$
$$d_2 = \sqrt{(x_2 - x_u)^2 + (y_2 - y_u)^2}$$
$$d_3 = \sqrt{(x_3 - x_u)^2 + (y_3 - y_u)^2}$$

Es gibt Methoden aus der linearen Algebra, um ein solches überbestimmtes Gleichungssystem zu lösen. Auf die Herleitung einer Lösung wird hier jedoch verzichtet.

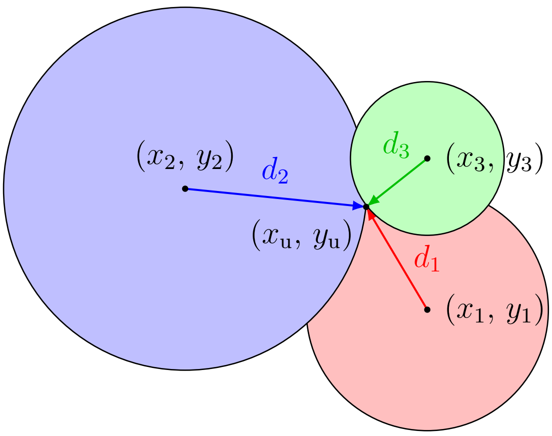



Abbildung 4: Die für die Bestimmung des Standortes $S_u$ benötigten Informationen.

## 1.2 Ortung im dreidimensionalen Raum

Im dreidimensionalen Raum gehen die in Abb. 4 dargestellten Kreise in Kugeln über. Das Gleichungssystem hat eine Unbekannte mehr, nämlich die Position des Anwenders in die Z-Achse:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \sqrt{(x_1 - x_\mathrm{u})^2 + (y_1 - y_\mathrm{u})^2 + (z_1 - z_\mathrm{u})^2} \\
d_2 &= \sqrt{(x_2 - x_\mathrm{u})^2 + (y_2 - y_\mathrm{u})^2 + (z_2 - z_\mathrm{u})^2} \\
d_3 &= \sqrt{(x_3 - x_\mathrm{u})^2 + (y_3 - y_\mathrm{u})^2 + (z_3 - z_\mathrm{u})^2} \\
d_4 &= \sqrt{(x_4 - x_\mathrm{u})^2 + (y_4 - y_\mathrm{u})^2 + (z_4 - z_\mathrm{u})^2}
\end{aligned}
$$

Im dreidimensionalen Raum sind mind. 4 Satelliten nötig, um die genaue Position bestimmen können. Wären nur die Informationen dreier Satelliten gegeben, so gäbe es zwei mögliche Lösungen der Position, ähnlich wie es in Abb. 2 für den zweidimensionalen Raum dargestellt ist. (Auch mit nur 3 Satelliten wäre eine Positionsbestimmung möglich, da eine der beiden Lösungen nicht realistisch ist. Die vierte Gleichung wird - wie später erklärt wird - benötigt, um den Uhrenfehler zu korrigieren. Grundsätzlich ist es so, das ein GPS Empfänger eigentlich immer mehr als vier Satelliten empfängt, er muss also immer ein überbestimmtes Gleichungssystem lösen.) Der GPS-Empfänger rechnet die Position des Users $x_\mathrm{u}$, $y_\mathrm{u}$, $z_\mathrm{u}$ iterativ auf Grund der gegebenen Informationen, namentlich die genaue Position des Satelliten gegeben durch $x_{1-4}$, $y_{1-4}$, $z_{1-4}$ sowie die Distanzen des GPS-Empfängers zu den Satelliten, welche durch $d_{1-4}$ gegeben sind:

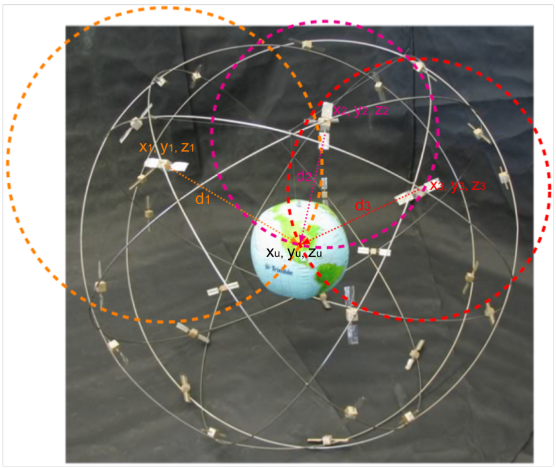
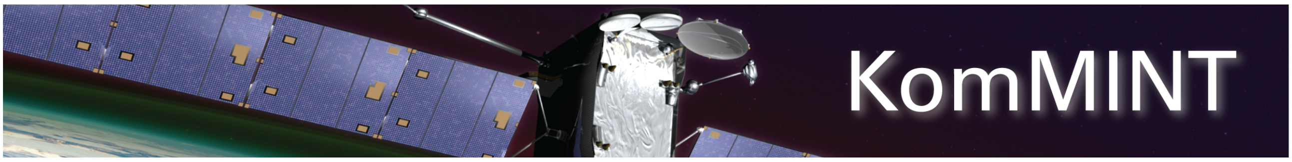



Abbildung 5: Mit Hilfe der Satellitenpositionen sowie der Distanzen zwischen Empfänger und Satellit lässt sich die eigene Position bestimmen.

Im Folgenden wird erklärt, wie diese Informationen (Satellitenposition und Distanz) zum Empfänger gelangen.




# 2 Satellitennavigation

## 2.1 Systemübersicht

Umgangssprachlich wird die Satellitennavigation auch "GPS" genannt, wobei diese Abkürzung für "Global Positioning System" steht. Ursprünglich stammt dieser Name vom ersten verfügbaren Satellitennavigationssystem Navstar GPS, welches von den USA in den 1980er Jahren ins Leben gerufen worden ist. Die amerikanischen Satelliten erhielten bald Besuch von russischen Satelliten und heute gibt es verschiedene Systeme, welche uns für die Navigation zu Verfügung stehen, namentlich sind es:

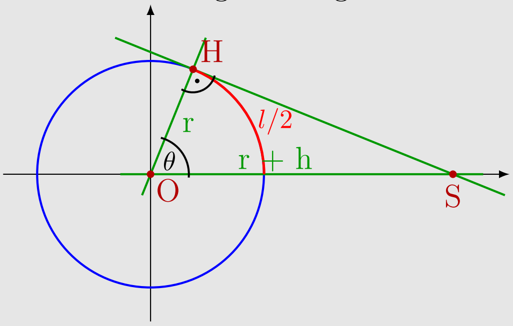
- **GPS**, 1978, USA
- **GLONASS**, 1982, Russland
- **BeiDou**, 2000, China
- **Galileo**, 2011, EU

Der korrekte Überbegriff für alle oben gelisteten Systeme heisst "GNSS", kurz für "Global Navigation Satellite System". Man spricht daher auch von "GNSS"-Empfängern, da diese eben nicht nur in der Lage sind, "GPS"-Signale zu empfangen, sondern auch alle anderen global verfügbaren Systeme. Im Folgenden wird das von den Amerikanern entwickelte System "GPS" etwas genauer erklärt, wobei sich diese Informationen auch auf die anderen Systeme übertragen lassen.

## 2.2 Satellitenabdeckung

**Aktivität**

Eine Frage, die sich die Entwickler von GPS stellen mussten, ist, wie viele Satelliten mindestens nötig sind, so dass man überall auf der Erde zu jeder Zeit 4 Satelliten sieht. Diese Fragestellung lässt sich mit Hilfe der folgenden Skizze beantworten:




Die Skizze visualisiert den von einem weit entfernten Punkt $S$ sichtbaren Bereich einer Kugel. Diese – vom Satelliten sichtbare Mantelfläche – lässt sich wie folgt berechnen

$$M = 2\pi r^2 \left(1 - \cos\left(\theta\right)\right),$$

wobei $r$ den Radius der Erde repräsentiert. Der Winkel $\theta$ zwischen der direkten Verbindung $\overline{SO}$ und der Tangente $\overline{SH}$ lässt sich wie folgt ausdrücken

$$\cos(\theta) = \frac{r}{r+h} = \frac{1}{1+\frac{h}{r}}.$$

Der von einem Satelliten sichtbare Mantelfläche

$$M = 2\pi r^2 \left(1 - \cos\left(\arccos\left(\frac{1}{1+\frac{h}{r}}\right)\right)\right) = 2\pi \frac{r^2 h}{r+h}.$$

Mit dem Radius $r = 6371\,\mathrm{km}$ und der mittleren Satellitenhöhe $h = 20200\,\mathrm{km}$ ergibt sich eine Fläche von

$$M_{\mathrm{Sat}} = 2\pi \frac{6371\,\mathrm{km}^2 20200\,\mathrm{km}}{6371\,\mathrm{km}+20200\,\mathrm{km}} = 193.9 \cdot 10^6\,\mathrm{km}^2$$

Die gesamte Oberfläche der Erde kann wie folgt berechnet werden

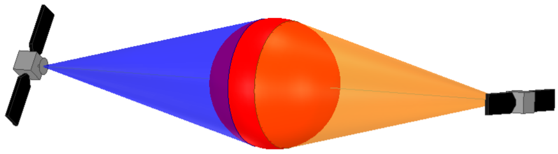
$$M_{\mathrm{Erde}} = 4\pi r^2 = 4\pi\left(6371\mathrm{km}\right)^2 = 510.06 \cdot 10^6\,\mathrm{km}^2.$$

Das Verhältnis dieser beiden Flächen $\frac{M_{\mathrm{Erde}}}{M_{\mathrm{Sat}}} \approx 2.6$ sagt uns, dass ein Satellit ungefähr 1/3 der gesamten Erdoberfläche abdecken kann. Möchte man also den gesamten Globus abdecken, so benötigt man nach dieser Rechnung 3 Satelliten.

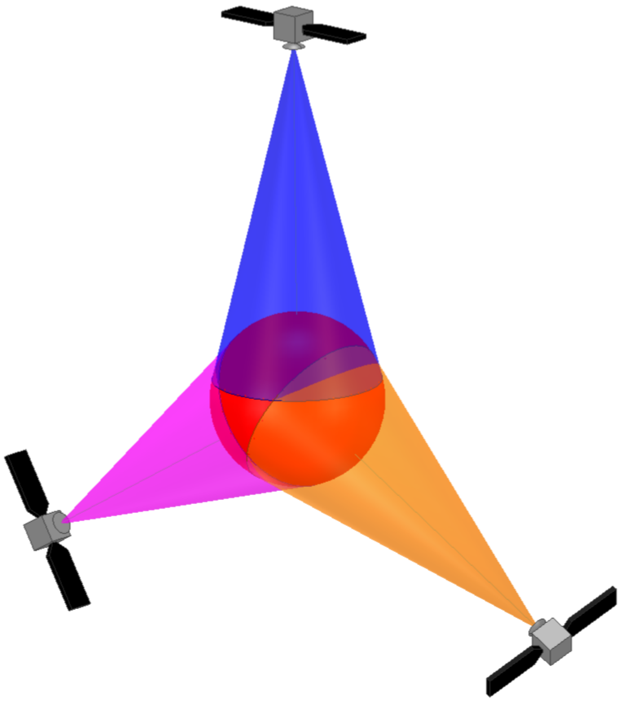
Diese Berechnung berücksichtigt jedoch nicht folgende Punkte:

- Auf Grund der gegebenen Geometrie (Kreise auf Kugeloberfläche) kommt es zu Überschneidungen der Kreise auf eben jener Oberfläche, was in der Berechnung nicht berücksichtigt wird. Das heisst, ein Teil der Erdoberfläche ist "doppelt" belegt, wohingegen andere Teilflächen nicht abgedeckt werden. Auf Grund der Tatsache, dass die Abdeckung eines jeden Satelliten kreisförmig ist, kommt es unweigerlich zu Überschneidungen der einzelnen Kreise, wenn die gesamte Oberfläche abgedeckt werden soll.
- Die Erde wird als glatte Kugel modelliert, was natürlich nicht der Realität entspricht. In der Realität hat die Erde die Form eines Ellipsoiden mit einer unebenen Oberfläche. Das heisst die Reichweite eines Satelliten ist auf Grund der nicht kugelförmigen Form sowie der unebenen Oberfläche zusätzlich begrenzt.
- Ein weiterer Punkt ist die Redundanz. Fällt ein Satellit in einem nicht redundanten System aus, so wäre ein grosser Teil der Erdoberfläche auf einen Schlag nicht mehr abgedeckt. Dies gilt es natürlich zu vermeiden, weswegen das System eine gewisse Redundanz aufweisen muss.

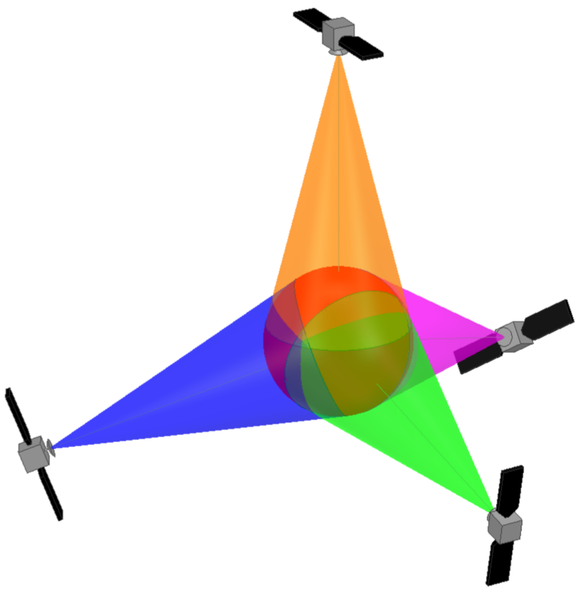
Der erste der oben beschriebenen Punkte lässt sich mit einer Simulation visualisieren. Hat man nur zwei Satelliten gegeben, welche auf einer horizontal liegenden Ebene ausgerichtet sind, wie es in Abb. 6(a) gezeigt ist, so werden nur Teile der beiden Erdhalbkugeln abgedeckt. Der Äquatorgürtel wird nicht abgedeckt. Dies wäre nur dann der Fall, wenn die beiden Satelliten unendlich weit voneinander entfernt wären, was sie natürlich nicht sind. In der dargestellten Abbildung sind die Abstände (Durchmesser Erde, Abstand Satellit - Erde) massstabsgetreu.
Bei der Konstellation mit drei Satelliten (siehe Abb. 6(b)) sieht man nun sehr deutlich, dass es hier auf Grund der Geometrie zu Überschneidungen der "Abdeckungskreise" kommt, wodurch Teile der Erdoberfläche doppelt abgedeckt sind, andere Teile jedoch gar nicht abgedeckt sind. Diese Problematik lässt sich mit einem vierten Satelliten beheben, wie man in Abb. 6(c) sehen kann. Natürlich muss eine dafür passende Konstellation gewählt werden. Bei der in Abb. 6(c) gezeigten Konstellation lassen sich Überschneidungen der Kreise nicht vermeiden, dies ist jedoch nicht weiter schlimm, da dadurch ja bereits eine gewisse Redundanz geschaffen wird.



(a) Konstellation mit zwei Satelliten.



(b) Konstellation mit drei Satelliten.



(c) Konstellation mit vier Satelliten.

Abbildung 6: Visualisierung der Kugeloberflächenabdeckung bei verschiedenen Satellitenkonstellationen.

**Aktivität**

Die in Abb. 6 dargestellten Konstellationen lassen sich auch mit Hilfe eines Experimentes im Klassenzimmer nachbilden. Dazu benötigt man einen Ball (oder Styroporkugel o.ä) sowie drei Ringe aus Schnur, welche die Abdeckung eines Satelliten repräsentieren. Die Abmessungen dieser Materialien sollten natürlich ungefähr massstabsgetreu gewählt werden, dazu berechnet man am Besten zuerst das Verhältnis des Erdradius gegenüber des Radius des Abdeckungskreises eines Satelliten:

$$r_{\text{Erde}} = 6371\,\text{km}$$

$$r_{\text{Sat}} = r_{\text{Erde}} \sin(\theta) = 6371\,\text{km} \sin(76.126°) = 6185\,\text{km}$$

$$\frac{\text{Sat}}{\text{Erde}} = \frac{6371\,\text{km}}{6185\,\text{km}} = 0.97$$

Im folgenden Beispiel wird ein Spielball mit einem Durchmesser von ≈20 cm verwendet. Daraus ergibt sich ein Durchmesser für die Abdeckungskreise der Satelliten von

$$D_{\text{Sat}} = 0.97 \cdot 20\,\text{cm} = 19.4\,\text{cm}$$

und einen Kreisumfang von

$$U_{\text{Sat}} = \pi 19.4\,\text{cm} = 61\,\text{cm}.$$

Hat man die Ringe aus Schnur erstellt, so kann man diese um den Ball platzieren. Im Folgenden werden mögliche Lösungen für 2, 3 und 4 Satelliten präsentiert. Das Ziel dieser Aktivität ist es, heraus zu finden, wie viele Satelliten mindestens nötig sind, um die gesamte Oberfläche des Erdballes abzudecken.

- **Szenario mit zwei Satelliten**
  Abb. 7 zeigt ein ähnliches Resultat wie das Simulationsresultat in Abb. 6(a). Ein Teil der Erdhalbkugel ist abgedeckt (blau und rot schraffierter Bereich), es gibt jedoch einen grossen Bereich im Bereich des Äquators (gelb markiert), welcher nicht abgedeckt wird.

Abbildung 7: Szenario mit zwei Satelliten.

- **Szenario mit drei Satelliten**
  Abb. 8 zeigt das Resultat, wenn man drei Satelliten gleichmässig über dem Erdball verteilt. Das Resultat zeigt, dass es hier zu Überschneidungen der Abdeckungen und ebenfalls zu nicht abgedeckten Bereichen kommt.

Abbildung 8: Szenario mit drei Satelliten.

- **Szenario mit vier Satelliten**
  Bei vier Satelliten gibt es mehrere Möglichkeiten, die Satelliten um den Ball anzuordnen. Man kann bspw. von Szenario 1 ausgehen (Abb. 6(a)) und dann einfach zwei weitere Satelliten orthogonal zu den beiden bereits bestehenden Satelliten anordnen. Es zeigt sich jedoch schnell, dass dann ein grosser Bereich der Balloberfläche nicht abgedeckt sein wird.
  Abb. 9 zeigt das Resultat, wenn man die vier Satelliten so anordnet wie es auch in der Simulation in Abb. 6(c) gezeigt ist. Man sieht am Resultat, dass mit dieser Lösung alle Bereiche abgedeckt sind, wie auch bereits die Simulation gezeigt hat.

Abbildung 9: Szenario mit vier Satelliten.

Die Experimente zeigen, dass vier Satelliten gerade ausreichen, um die gesamte Oberfläche einer ebenen Kugel abzudecken. Wenn man nun jedoch berücksichtigt, dass die Erde keine perfekte

Kugel ist, die Oberfläche der Erde nicht eben ist, dann ist es durchaus sinnvoll, die Zahl von vier auf mehr Satelliten zu erhöhen, bspw. auf sechs. Berücksichtigt man noch die Tatsache, dass zu jedem Zeitpunkt auf der Erde mindestens vier Satelliten sichtbar sein sollten (siehe dazu Abschnitt 1.2), so ergibt sich eine Gesamtzahl von 24 Satelliten in einem System.
Beim GPS System ist es so, dass immer vier Satelliten auf einer elliptischen Bahn auf zirka 20200 km Höhe um die Erde kreisen, wie es in es in Abb. 10 dargestellt ist. Es gibt sechs solcher Bahnen, welche so zueinander und zur Erde ausgerichtet sind, dass eine optimale Abdeckung erreicht wird. Bei der Berechnung dieser Bahnen wurde beispielsweise auch die Tatsache berücksichtigt, dass am Nord- und Südpol viel weniger Menschen leben als in anderen Regionen auf der Erde. Die Abdeckung an diesen beiden Orten ist dementsprechend schlechter verglichen mit anderen Orten bspw. in Europa. In diesen Regionen ist es durchaus normal, dass man zu jedem Zeitpunkt mehr als vier Satelliten sieht. Dies ist vor allem dann sehr förderlich, wenn man sich an einem Ort mit grosser "Abschattung" wie einer Grossstadt oder einem tiefen Tal befindet.

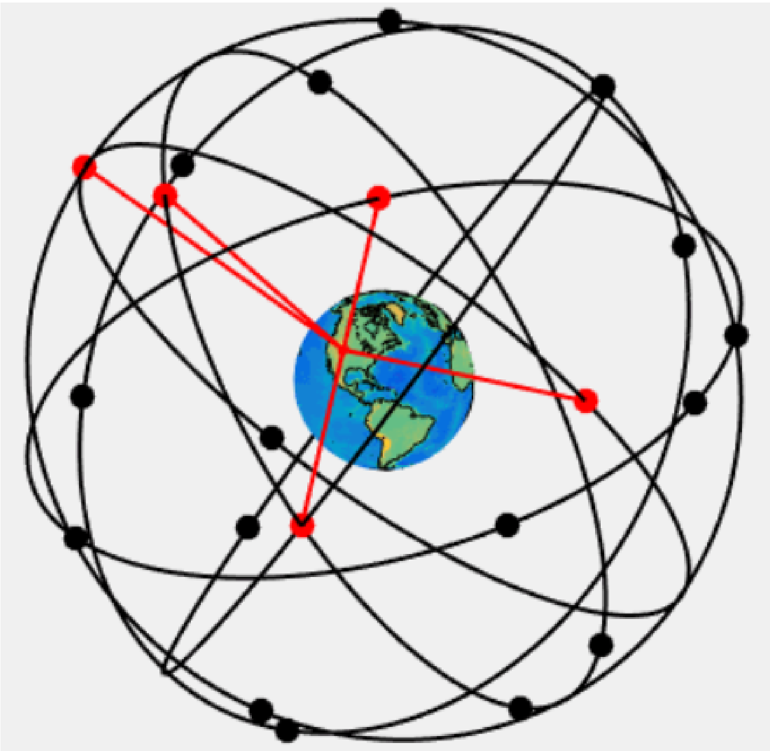


Abbildung 10: GPS Satellitenkonstellation. [1]

## 2.3 GPS Signal

Im Kapitel 1.2 wurde beschrieben, dass ein GPS-Empfänger für die Berechnung der eigenen Position $x_\mathrm{u}, y_\mathrm{u}, z_\mathrm{u}$ folgende Informationen benötigt:

- Die genaue Position $x_\mathrm{n}, y_\mathrm{n}, z_\mathrm{n}$ der aktuell empfangenen n Satelliten.
- Die direkte Distanz $d_\mathrm{n}$ zu diesen n Satelliten.

Kennt man diese Unbekannten kann man die nachfolgende Gleichung iterativ nach der eigenen Position $x_\mathrm{u}, y_\mathrm{u}, z_\mathrm{u}$ lösen:

$$d_\mathrm{n} = \sqrt{(x_\mathrm{n} - x_\mathrm{u})^2 + (y_\mathrm{n} - y_\mathrm{u})^2 + (z_\mathrm{n} - z_\mathrm{u})^2}$$

Die Frage ist nun, wie der GPS-Empfänger diese Informationen erhält, um diese Gleichungen zu lösen. Dazu hilft ein Blick auf die Daten, welcher ein jeder (GPS) Satellit aussendet:

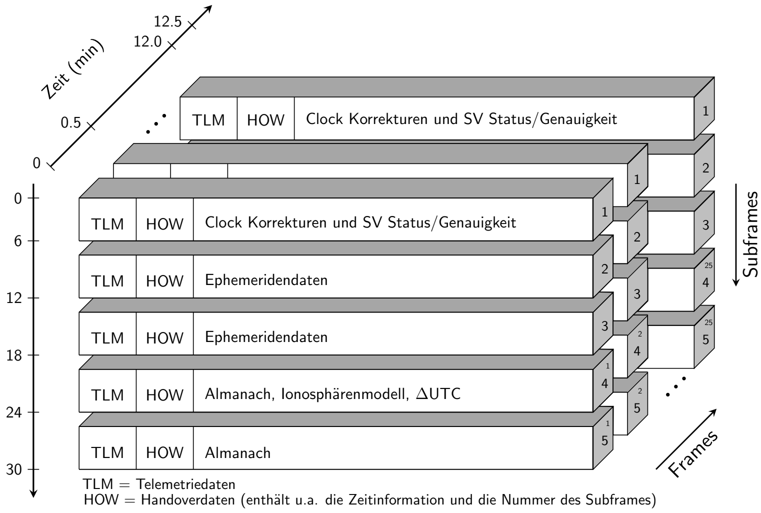



Abbildung 11: Aufbau der Daten, welche von GPS Satelliten ausgesendet werden.

Die Daten sind in so genannte Frames unterteilt, welche wiederum aus Subframes bestehen. Es dauert 30 Sekunden, um 5 Subframes zu übermitteln. Das zweite und dritte übertragene Subframe in diesem Quintett enthalten immer die so genannten **Ephemeridendaten**, welche genutzt werden können, um die **Position des Satelliten** (von welchem die Subframes ausgesendet werden) zu bestimmen.
Nun fehlt "nur" noch die Distanz. Diese lässt sich mit Hilfe der empfangenen Nachricht ebenfalls bestimmen und zwar benötigt man dazu lediglich zwei Informationen: Den Zeitpunkt, an welchem die Nachricht beim Satelliten versandt worden ist und den Zeitpunkt, an welchem die Nachricht beim Empfänger angekommen ist. Der Sendezeitpunkt $t_\mathrm{S}$ ist im Beginn eines jeden Subframes gegeben und kann vom Empfänger einfach dekodiert werden. Jeder Empfänger besitzt eine eigene Uhr und kann den Empfangszeitpunkt $t_\mathrm{E}$ deswegen ganz einfach messen. Die Differenz zwischen Sende- und Empfangszeitpunkt ist die Laufzeit, also die Zeit, in welcher die Nachricht vom Satelliten zum Empfänger "reiste":

$$\Delta t = t_\mathrm{S} - t_\mathrm{E}$$

Mit Hilfe der Laufzeit und dem Wissen, dass die Nachricht mit Lichtgeschwindigkeit unterwegs war, lässt sich nun ganz einfach die Distanz zwischen Empfänger und Satelliten bestimmen:

$$d = c_0 \cdot \Delta t \approx 299'792.458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \Delta t$$

In dieser Berechnung können sich zwei Fehlerquellen einschleichen. Die erste rührt von der Ungenauigkeit der Uhr des Empfängers. Während die Satelliten mit extrem genauen Atomuhren ausgestattet sind, verfügen die Empfänger meist nicht über so genaue Uhren. Dies bedeutet, dass die berechnete Zeitdifferenz nicht korrekt ist, wenn dieser Uhrenfehler nicht korrigiert wird. Bereits eine Abweichung von 1 ms führt zu einem Distanzfehler von ungefähr 299 km. Dies ist natürlich nicht akzeptabel. Der Uhrenfehler kann ganz einfach kompensiert werden, in dem dieser in die oben gezeigte Gleichung mit einbezogen wird (auf die Darstellung dieser neuen Gleichung wird an dieser Stelle verzichtet). Da diese Gleichung nun 4 Unbekannte aufweist (die eigene Position in x- y- und z-Richung sowie den Uhrenfehler) werden 4 Satelliten (= 4 Gleichungen) benötigt, um alle Unbekannten zu lösen, also auch den Uhrenfehler.
Die zweite Ungenauigkeit rührt von der Ionosphäre, jener Schicht in der Erdatmosphäre, welche elektrisch geladene Teilchen enthählt. Auf ihrem Weg zur Erde durchdringen die GPS Signale diese Schicht und interagieren mit ihr. Die Ionosphäre kann die Ausbreitungsgeschwindigkeit der GPS-Signale beeinflussen, da sie je nach Dichte der geladenen Teilchen die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Signale verändert. Dies führt zu einer Verzögerung in der Laufzeit der Signale, wenn sie durch die Ionosphäre hindurchgehen.
Da die Ionosphäre nicht konstant ist und sich abhängig von Faktoren wie Tageszeit, Sonnenaktivität und geografischer Lage verändert, kann dieser Effekt die Genauigkeit der Entfernungsmessungen beeinträchtigen. Es gibt GPS-Empfänger, welche diesen Fehler berücksichtigen, indem sie spezielle Korrekturdaten von Bodenstationen oder GPS-Satelliten verwenden, um die Auswirkungen der Ionosphäre auf die Signalverzögerung zu kompensieren. Diese Korrekturen helfen, die Genauigkeit der GPS-Positionsbestimmung zu verbessern.

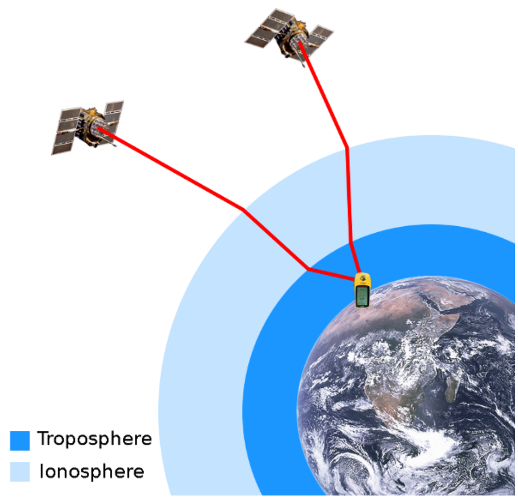
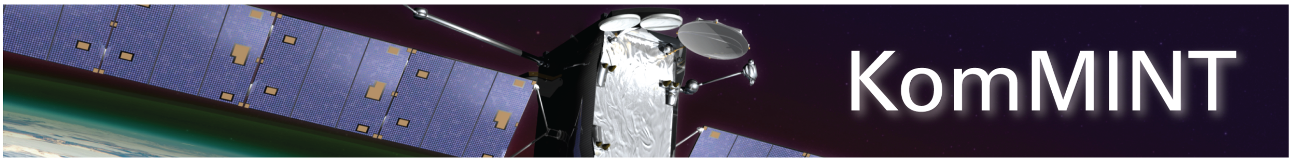



Abbildung 12: Die Ionosphäre (sowie auch die Troposphäre) beeinflussen die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Signale vom Sender zum Empfänger. Quelle: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gps-atmospheric-efects.png`




## Literatur

[1] Paulsava, CC BY-SA 4.0, https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0, via Wikimedia Commons